

F-Praktikum Ia/c
Experimentelle Physik
Quantendefekt an Natrium und Cäsium*

Klaudia Herbst Manfred Thomann

14.01.2004

*Wir erklären, dass wir dieses Protokoll eigenhändig anhand unseres Messprotokolls und der angegebenen Literatur erstellt haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
1.1	Alkaliatome	1
1.2	Theoretische Grundlagen	1
2	Durchführung	3
2.1	Aufbau	3
2.2	Durchführung	3
2.3	Auswertung	4
2.3.1	Kalibrierung	4
2.3.2	Cäsiumspektrum	4
2.3.3	Natriumspektrum	6
3	Auswertung	7
3.1	Laser	7
3.1.1	Mittenwellenlänge	7
3.1.2	Modenabstand	7
3.2	Cäsium	8
3.2.1	Bestimmung des Quantendefekts	8
4	Probleme und Verbesserungsvorschläge	11

Abbildungsverzeichnis

1	Dispersionsrelation an Hg	5
2	Nebenserie 1a nach Madelung $n_0 = 6$	9
3	Nebenserie 1b nach Madelung $n_0 = 7$	9
4	Nebenserie 2 nach Madelung $n_0 = 6$	10

Tabellenverzeichnis

1 Theorie

1.1 Alkaliatome

Wir untersuchen in diesem Versuch Natrium und Cäsium. Von allen Mehrelektronenatomen sind Alkaliatome die, die dem Wasserstoff am ähnlichsten sind. Bei einer expliziten Berechnung muß jedoch sowohl die Wechselwirkung zwischen Atomkern und Elektronenhülle als auch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung beachtet werden. Dies bringt einige Schwierigkeiten mit sich, und man muß auf ein einfacheres Konstrukt zurückgreifen. Eines das dem des Wasserstoffs gleicht. Betrachtet man Alkaliatome wird schnell klar das sie aus einem Ionenrumpf, welcher Edelgaskonfiguration besitzt, und einem einzelnen Valenzelektron bestehen. Natrium besitzt die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 p^6 3s$, kurz $[\text{Ne}]3s$, Cäsium dagegen $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^{10} 4s^2 p^6 d^{10} 5s^2 p^6 6s$, $[\text{Xe}]6s$, wobei die vierte und fünfte Schale nur teilweise besetzt sind. Dieses eine Leuchtelektron, für Natrium das 3s-Elektron, für Cäsium das 6s-Elektron, besitzt ein Wasserstoff-ähnliches Spektrum.

Es ist möglich den Kern und die Z-1 abgeschirmten Elektronen durch ein effektives Potential zu beschreiben. Mit diesem Potential können die Energieniveaus des Valenzelektrons exakt bestimmt werden, mehr dazu im folgenden Abschnitt.

1.2 Theoretische Grundlagen

Beim Wasserstoffspektrum handelt es sich um ein Zweikörperproblem (Proton-Elektron), und ist damit quantenmechanisch relativ einfach beschreibbar. Man geht dabei davon aus, dass sich das Elektron in einem einfachen Coulombpotential des Protons befindet. In unserem Fall kommen nun zusätzliche Elektronen und Protonen, für Natrium 11 und für Cäsium 55, hinzu. Dies bringt eine starke Modifizierung der Energieniveaus, gegenüber denen des Wasserstoffs, durch die auftretende Elektron-Elektron-Wechselwirkung mit sich. Die Modifikation äußert sich in einer Verschiebung der Energieniveaus gleicher Hauptquantenzahl n mit verschiedenen Nebenquantenzahlen l . Kurz, es kommt zur Aufspaltung der Energieterme, und man spricht von einer Aufhebung der „l-Entartung“. l ist dabei die Drehimpulsquantenzahl, und beschreibt die vom Elektron beschriebene Ellipsenbahn deren Exzentrizität für kleiner werdende l stark zunimmt. Je größer die Exzentrizität, desto näher kommt das Valenzelektron dem Kern auf Teilbereichen seiner Bahn. Teilweise sogar soweit, dass es in den Ionenrumpf, also in die inneren Schalen, eintaucht. Eine vollständige Abschirmung von den Z-1 Elektronen ist dort nicht mehr gewährleistet.

Somit ist das im vorigen Abschnitt auftretende effektive Potential V_{eff} für kernferne Gebiete annähernd das Coulombpotential $V_C = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, für kernnahe Gebiete ist jedoch die Abhängigkeit der Kernladungszahl zu erkennen, und das Potential ergibt sich zu $V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Damit ist es möglich das effektive Potential V_{eff} in Nähe des Kerns als Coulombpotential mit Störpotentialanteil zu behandeln. Eine Reihenentwicklung liefert

uns den Ansatz:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{d^2}{r^2} + O(r^3)$$

wobei d^2 den Abweichungsgrad vom idealen Zentralpotential darstellt. Dank dieses Ansatzes und durch einen Separationsansatz der Form:

$$\Psi(r, \Theta, \Phi) = R(r) \cdot P_l^m(\cos \Theta) \cdot e^{im\Phi}$$

ergibt sich für die zeitunabhängige Schrödingergleichung folgender Ausdruck:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + E_{nl} \right) - \left(\frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 - \frac{d^2}{r^2} \right) \right] R = 0$$

Es ergibt sich die Relation $l(l+1) - \frac{2M}{\hbar^2} = l^*(l^*+1)$, wobei l^* die gestörte Drehimpulsquantenzahl des Wasserstoffs l ist. Nach Normierung und im Falle kleiner Störungen ($d^2 \ll \frac{\hbar^2}{M}$) erhält man für die Drehimpulsquantenzahlentartung beim Wasserstoffatom den Korrekturterm

$$l^* = l - \frac{2Md^2}{\hbar^2(2l+1)} \quad (1)$$

$$= l - \delta_l \quad (2)$$

Damit ist es möglich die Energieeigenwerte wie die des Wasserstoffs durch

$$E_{nl} = -\frac{Me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{(n - \delta(l))^2} \quad (3)$$

$$= \frac{R}{(n - \delta(l))^2} \quad (4)$$

zu bestimmen. Der Term $\frac{Me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}$ stellt dabei die Rydbergkonstante R dar.

Die Energieniveaus sind also äquivalent zu denen des Wasserstoffs bis auf einen Korrekturterm $\delta_l = n - n^*$, dem sogenannten Quantendefekt.

Bei dem Quantendefekt handelt es sich um empirische Zahlenwerte. Für das Spektrum des Natriumatoms zum Beispiel ergeben sich folgende Werte.

	Term	n=3	4	5	6	7	8
l=0	s	1,373	1,357	1,352	1,349	1,348	1,351
1	p	0,883	0,867	0,862	0,859	0,858	0,857
2	d	0,010	0,011	0,013	0,011	0,009	0,013
3	f	-	0,000	-0,001	-0,008	-0,012	-0,015

Richtmeyer and Kennard, Introduction to Modern Physics

2 Durchführung

2.1 Aufbau

In dem Versuch geht es um die spektroskopische Bestimmung des Quantendefektes. Neben einem Spektrometer, welches rechnergestützt angesteuert wird, stehen dazu ein Monochromator, ein Laser, drei verschiedene Spektrallampen und einige optische Bauelemente, die für den korrekten Strahlengang sorgen, zur Verfügung.

Das Spektrometer ist in unserem Fall ein Gitterspektrometer, welches aus Eintritts- und Austrittsspalt, zwei Spiegeln und einem Beugungsgitter besteht.

Das Licht der zu untersuchenden Spektrallampe fällt auf den Eintrittsspalt, und wird über einen Spiegel auf das drehbare Gitter gelenkt. Dort wird es spektral zerlegt. Das entstehende Beugungsbild wird wiederum über den zweiten Spiegel auf den Austrittsspalt gelenkt, hinter dem sich der Photomultiplier befindet. Da der Photomultiplier auf Basis des Photoeffektes funktioniert wird das auf ihn einfallende Licht in messbaren Strom umgewandelt.

Die Ansteuerung des Schrittmotors zur Drehung des Gitters im Spektrometer wird rechnergestützt durchgeführt.

Bevor aber die Emissionsspektren der Spektrallampen aufgenommen werden können, muss zunächst der Strahlengang mit Hilfe eines Lasers justiert werden.

Bei den zu untersuchenden Spektrallampen handelt es sich um eine Quecksilberdampf-lampe, eine Cäsiumdampf-lampe und um eine Natriumdampf-lampe.

2.2 Durchführung

Wie gerade erwähnt wird zuerst der Strahlengang anhand eines Helium-Neon-Lasers justiert. Der einfallende Strahl wird mittels der Spiegel so positioniert, dass der Strahlengang genau auf den Eintrittsspalt fällt. Dabei wird der Eintrittsspalt selbst so eingestellt (vergrößern oder verkleinern des Spaltes) das das Beugungsbild auf dem ersten Spiegel des Spektrometers deutlich zu erkennen ist. Ist eine optimale Spaltbreite herausgefunden worden, wird der Austrittsspalt dem Eintrittsspalt angepasst.

Das Spektrometer wird so justiert, dass der Strahl des Eintrittsspalt über den ersten Spiegel direkt auf das Gitter abbildet. Das Gitter selbst wird anhand der Handsteuerung so positioniert, dass das Beugungsbild auf dem zweiten Spiegel fällt, der dann das Beugungsbild auf den Austrittsspalt abbildet.

Das Spektrometer kann nach dieser Justage wieder verschlossen, der Laser gegen die Quecksilberdampf-lampe ausgetauscht und der Photomultiplier angeschaltet werden.

2.3 Auswertung

2.3.1 Kalibrierung

Zuerst wird das Quecksilberdampf lampenspektrum mit Hilfe eines LabView-Programmes aufgenommen.

Dieses Spektrum wird mit Hilfe der ausliegenden Spektraltafel verglichen, damit die aufgenommenen Linien einer Wellenlänge zugeordnet werden können (siehe Messprotokoll). Es ergeben sich folgende Daten:

λ [Å]	x [Skt]
3650,4	29644
3655,0	29730
3663,4	29880
4046,6	36500
4077,8	37043
4339,2	41587
4347,5	41731
4358,4	41914
4916,0	51780
5460,7	61914

In der Annahme, dass eine lineare Beziehung zwischen Schrittmotorzahl, dem Winkel des Gitters, und der Wellenlänge besteht, werden die dem Quecksilber zugehörigen Spektrallinien gegen die Schrittzahl aufgetragen.

Wir erhalten eine Dispersionsfunktion der Form:

$$\lambda[\text{Å}] = -1,24 \cdot 10^{-7} x^2 + 0,068x + 1729 \quad (5)$$

Wie man sieht ist der quadratische Term vernachlässigbar klein, die Dispersionsfunktion kann als linear angesehen werden. Damit ergibt sich für die Dispersion die in Abb.1 genannte Formel.

2.3.2 Cäsiumspektrum

Wir betrachten das Cäsiumspektrum. Alle erfassten Linien können dank der soeben gefundenen Dispersionsfunktion bestimmt werden. Die Skalenteile und deren zugehörigen Wellenlängen sind in der folgenden Tabelle zusammengetragen. Des weiteren sind die entsprechenden Übergänge von uns zugeordnet worden.

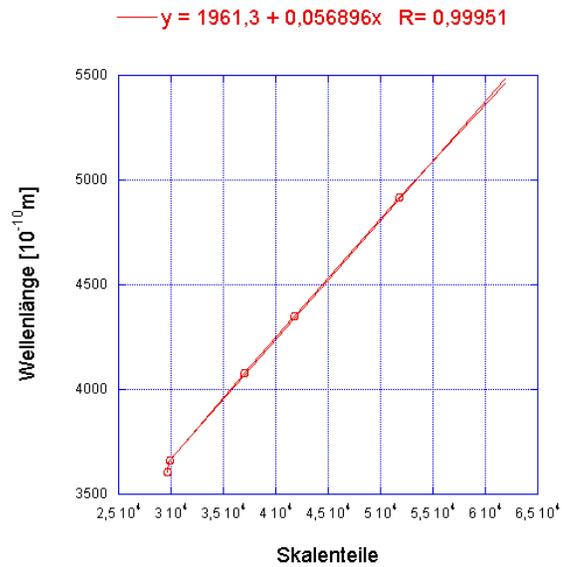


Abbildung 1: Dispersionsrelation an Hg

λ [Å]	x [Skt]	$\bar{\nu}$ [10 ⁶]	Übergang	J
3878,7	40521	2,58	6s- 8p	1/2-3/2
3890,8	40734	2,57	6s- 8p	1/2-1/2
4356,4	?	2,3	-	-
4552,6	52345	2,2	6s- 7p	1/2-3/2
4589,5	53014	2,18	6s- 7p	1/2-1/2
5190,5	63771	1,93	6p-13d	1/2-3/2
5251,0	64860	1,9	6p-12d	1/2-3/2
5335,9	66390	1,87	6p-11d	1/2-3/2
5458,3	68658	1,83	6p-13s	3/2-1/2
5499,2	69339	1,82	6p-11d	3/2-5/2
5566,0	70542	1,8	6p-11s	1/2-1/2
5633,9	71761	1,78	6p-10d	3/2-5/2
5663,3	72289	1,77	6p-10d	3/2-3/2
5747,0	73802	1,74	6p-11s	3/2-1/2
5848,6	75643	1,71	6p- 9d	3/2-5/2
5900,9	76588	1,69	-	-
6018,8	78733	1,66	6p- 8d	1/2-3/2
6043,4	79180	1,65	6p-10s	3/2-1/2
6234,9	82560	1,6	6p- 8d	3/2-3/2
6472,6	85267	1,55	-	-

$\bar{\nu}$ wird dabei aus $1/\lambda$ berechnet.

Wir betrachten die erste und zweite Nebenserie, die anhand der im Praktikum ausgegebenen Spektraltafel identifiziert wurden.

1. Nebenserie

gemessene Wellenlänge	Literaturwert	Übergang
5190,5	5196,73	$6p^2P_{1/2} \rightarrow 13d^2D_{3/2}$
5251,0	5256,56	$6p^2P_{1/2} \rightarrow 12d^2D_{3/2}$
5335,9	5350,35	$6p^2P_{1/2} \rightarrow 11d^2D_{3/2}$
6018,8	6010,49	$6p^2P_{1/2} \rightarrow 8d^2D_{3/2}$

gemessene Wellenlänge	Literaturwert	Übergang
5499,2	5502,88	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 11d^2D_{5/2}$
5633,9	5635,21	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 10d^2D_{5/2}$
5848,6	5845,14	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 9d^2D_{5/2}$

2. Nebenserie

gemessene Wellenlänge	Literaturwert	Übergang
5458,3	5461,92	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 13s^2S_{1/2}$
5747,0	5745,72	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 11s^2S_{1/2}$
6043,4	6034,08	$6p^2P_{3/2} \rightarrow 10s^2S_{1/2}$

2.3.3 Natriumspektrum

Das selbe wird nun für das Natriumspektrum ausgewertet. Vorab stellen wir wieder alle wichtigen Daten, die für die weiteren Rechnungen von Belang sind, in einer Tabelle dar.

$\lambda[\text{\AA}]$	x [Skt]	$\bar{\nu}[10^6]$	Übergang	J
4001,3	41770		-	-
4098,6	43423		-	-
4356,0	47853		3p- 9d	1/2-3/2
4390,5	48452		3p- 8d	1/2-3/2
4401,8	48649		3p- 8d	3/2-5/2
4567,7	51560		-	-
4579,5	51768		-	-
4611,1	52328		-	-
4652,7	53066		3p- 6d	1/2-3/2
4724,6	54348		3p- 7s	1/2-1/2
5029,1	59858		3p- 5d	3/2-5/2
5033,5	59938		-	-
5199,0	62994		3p- 6s	3/2-1/2(???)
5199,3	62999		-	-
5528,8	69213		-	-
5588,5	70358		-	-
5634,5	71246		-	-
5674,3	72016		3p- 4d	3/2- -

3 Auswertung

3.1 Laser

3.1.1 Mittenwellenlänge

Mit der Dispersionsformel des Quecksilberspektrums erhält man für 85462 Skt eine Wellenlänge von 6824 Å.

3.1.2 Modenabstand

Für die Moden ergaben sich folgende Werte:

Ordnung	links [Skt]	Δ [Skt]	rechts [Skt]	Δ [Skt]
1	85429	33	85495	33
2	85398	31	85524	29
3	85364	34	85553	29
4	85329	35	85584	31
5	85296	33	85616	32
6	85267	29	85644	29

Damit ergeben sich als Modenabstand links 32,5 Skt und rechts 30,5 Skt. Dies entspricht einem Abstand von 1,7Å. Also kann das Gitterspektrometer die für diesen Versuch

nötige Auflösung der Spektrallinien liefern. Das die Modenabstände nicht gleich sind kann an der Messgenauigkeit liegen oder darauf hinweisen, dass der Strahlengang nicht ganz parallel war.

3.2 Cäsium

Aus den in Abschnitt 2.3.2 ermittelten Spektrallinien ergeben sich folgende Nebenserien: Nebenserie 1a:

$\lambda[\text{\AA}]$	x [Skt]	$\bar{\nu}[10^6]$	Übergang	J
5190,5	63771	1,93	6p - 13d	1/2-3/2
5251,0	64860	1,9	6p - 12d	1/2-3/2
5335,9	66390	1,87	6p - 11d	1/2-3/2
6018,8	78733	1,66	6p - 8d	1/2-3/2

Nebenserie 1b:

$\lambda[\text{\AA}]$	x [Skt]	$\bar{\nu}[10^6]$	Übergang	J
5499,2	69339	1,82	6p-11d	3/2-5/2
5633,9	71761	1,78	6p-10d	3/2-5/2
5848,6	75643	1,71	6p- 9d	3/2-5/2

Nebenserie 2:

$\lambda[\text{\AA}]$	x [Skt]	$\bar{\nu}[10^6]$	Übergang	J
5458,3	68658	1,83	6p-13s	3/2-1/2
5747,0	73802	1,74	6p-11s	3/2-1/2
6043,4	79180	1,65	6p-10s	3/2-1/2

3.2.1 Bestimmung des Quantendefekts

Bevor der Quantendefekt berechnet werden kann müssen für die Nebenserien die Grenzterme bestimmt werden. Für die Bestimmung der Grenzterme wird die Madelung Extrapolation verwendet. Bei diesem Verfahren wird dem 1. Serienglied ein ganze Zahl n zugeordnet und den darauf folgenden $n+1$ usw. Bei der Darstellung wird dann die Wellenzahl $-1/\lambda$ gegen $1/n^2$ aufgetragen. Die Zahl n wird solange variiert bis der Kurvenverlauf einer Geraden am nächsten kommt. Diese Art der Darstellung liefert für die oben stehenden Nebenserien die Abbildungen 2, 3 und 4. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich dann der Grenzterm, der Schnittpunkt mit der Y-Achse. Dies sind:

Nebenserie	Wellenzahl [1/m]
1a	2040900
1b	1985200
2	1974200

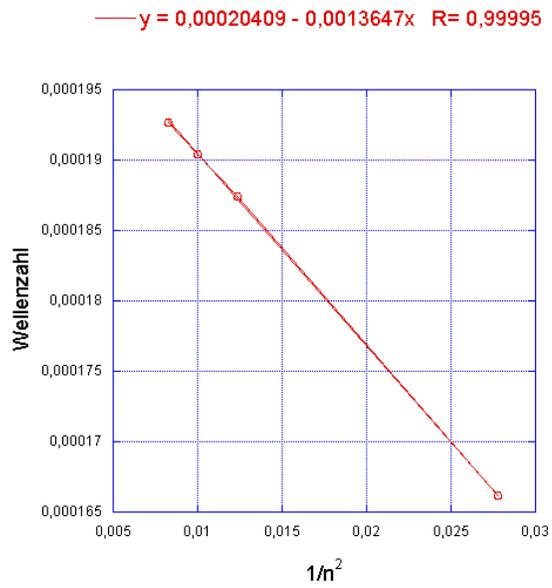


Abbildung 2: Nebenserie 1a nach Madelung $n_0 = 6$

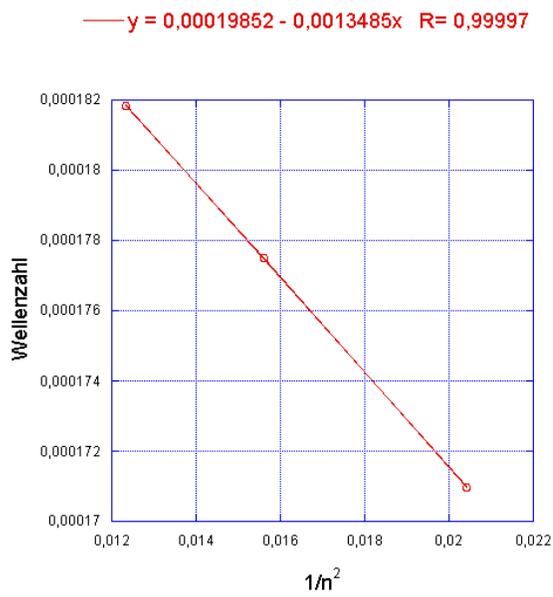


Abbildung 3: Nebenserie 1b nach Madelung $n_0 = 7$

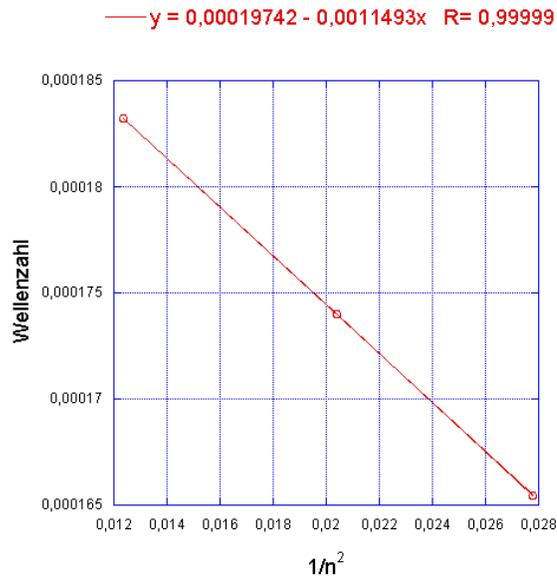


Abbildung 4: Nebenserie 2 nach Madelung $n_0 = 6$

Die Berechnung des Quantendefekts geschieht über die Formel:

$$\Delta\bar{\nu} = R_H \left[\frac{1}{(n - \delta(l_n))^2} - \frac{1}{(m - \delta(l_m))^2} \right]$$

Lässt man jetzt $m \rightarrow \infty$ laufen ergibt sich:

$$\Delta\bar{\nu} = R_H \frac{1}{(n - \delta(l_n))^2}$$

Dies stellt man nun nach $\delta(l_n)$ um und bekommt:

$$\delta(l_n) = n - \sqrt{\frac{R_H}{\Delta\bar{\nu}}}$$

Für Cäsium ist $n = 6$, damit ergeben sich für den Quantendefekt folgende Werte:

Nebenserie	Quantendefekt
1a	3,68
1b	3,65
2	3,64

Der Literaturwert für Cäsium liegt bei 3,6.

4 Probleme und Verbesserungsvorschläge

Bei der Auswertung gab es folgende Probleme:

- Die Aufgabe 3 scheint mit dem gegebenen Wert ($n=5$) zu dem Rubidium Spektrum zugehören, das nicht mehr aufgenommen wird.
- Es wird aus der Versuchsanleitung nicht klar wie die anderen Quantendefekte berechnet werden.

Literatur

- [1] Hermann Haken and Hans Christoph Wolf. *Atom- und Quantenphysik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 7. edition, 2002.